Capítulo 3

Estabilidad de ecuaciones diferenciales

En este tema estudiaremos como resolver sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes utilizando la transformada de Laplace, la estabilidad para sistemas y las funciones de transferencias.

3.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

En este capítulo trabajaremos con sistemas de n ecuaciones diferenciales de primer orden en n variables que escribiremos

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{\varphi}\left(t, \mathbf{x}\right) \tag{3.1}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ son funciones reales a determinar que dependen de t y $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n)$ con $\varphi_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Por lo general trabajaremos con sistemas de 2 o 3 ecuaciones diferenciales. Los sitemas de 3 ecuaciones diferenciales de primer orden en tres variables son sistemas de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} x' = \varphi_1\left(t, x, y, z\right), \\ y' = \varphi_2\left(t, x, y, z\right), \\ z' = \varphi_3\left(t, x, y, z\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

donde x, y, z son funciones reales a determinar que dependen de $t \in \mathbb{R}$ y $\varphi_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+3} \longrightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$.

Una solución de (3.2) son 3 funciones $x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$ y $z = z\left(t\right)$, que abreviaremos escribiendo $x(t) = \left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)$, tales que

$$\frac{d}{dt}x\left(t\right) = \varphi_1\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right),$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \varphi_2(t, x(t), y(t), z(t)),$$

y

$$\frac{d}{dt}z(t) = \varphi_3(t, x(t), y(t), z(t)).$$

Ejemplo 1 *Verificar que* $x(t) = t$ *e* $y(t) = t^2$ *es una solución del sistema*

$$\begin{cases} x' = 1, \\ y' = 2x. \end{cases}$$

En general la resolución de estos sistemas de ED no es posible, salvo en casos excepcionales. Sólo para el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que veremos un poco más tarde existen algortimos que permiten el cálculo explícito de las soluciones (usaremos la Transformada de Laplace). Sin embargo, es relativamente sencillo saber cuándo un sistema tiene solución, o más precisamente cuándo el problema de condiciones iniciales asociado tiene solución. Primero claro está, debemos definir lo que entederemos por un problema de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales. Dicho problema es un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo (3.2) junto con las condiciones

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = y^0 \in \mathbb{R}, \\ z(t_0) = z^0 \in \mathbb{R}, \end{cases},$$

o bien

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = \left(x^0, y^0, z^0\right) \in \mathbb{R}^3,$$

que escribiremos en el caso general como

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ejemplo 2 *Verificar que* $x(t) = e^t$ *e* $y(t) = 1 + \frac{e^{2t}}{2}$ *es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con valores iniciales*

$$\begin{cases} x' = x, & x(0) = 1 \\ y' = x^2, & y(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Las ecuaciones diferenciales de orden 3 para una variable $x(t)$

$$x''' + p(t)\,x'' + q(t)\,x' + r(t)\,x = g(t)$$

se pueden transformar en el sistema de ecuaciones diferenciales de orden 3, para las variables $x(t) = x$, $y(t) = x'$ y $z(t) = y'$

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z \\ -z' = -p(t)\,z - q(t)\,y - r(t)\,x + g(t) \end{cases}$$

Gracias a esto, de cualquier resultado que obtengamos para sistemas de cualquier orden (ya que de la misma forma las ED de orden n se pueden transformar en un sistema de ED de orden n) podremos deducir consecuencias inmediatas para ecuaciones.

Enunciamos ahora el sistema de existencia e unicidad de coluciones para el caso particular de sistemas de 3 ecuaciones diferenciales y 3 incognitas. De forma similar se enunciaría el resultado para el caso n.

Teorema 3.1.1 ***de existencia e unicidad de solución***
Consideremos el problema de condiciones iniciales (PVI)

$$\begin{cases} x' = \varphi_1(t,x,y,z), \\ y' = \varphi_2(t,x,y,z), \\ z' = \varphi_3(t,x,y,z), \\ x(t_0) = x^0,\ y(t_0) = y^0,\ z(t_0) = z^0, \end{cases}$$

donde $(t,x,y,z) \in \Omega$ y $\varphi_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+3} \longrightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1,2,3$, son funciones continuas en el abierto Ω. Supongamos además que las funciones $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ y $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}$ para $i = 1,2,3$, existen y son continuas en Ω. Entonces existe una única solución del PVI anterior $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$ para todo $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, donde I es un intervalo.

Ejemplo 3 *Verificar si el siguiente sistema de ED tiene solución única*

$$\begin{cases} x' = tx + y^2 - z, \\ y' = t + x + yz, \\ z' = xyz \\ x(0) = 2,\ y(0) = 0 \text{ y } z(0) = 1. \end{cases}$$

Si cada una de las funciones φ_j, $i = 1,2,3$, en (3.2) es una función lineal de las variables dependientes x, y, z, entonces diremos que el **sistema de**

ecuaciones diferenciales es lineal. El más general de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden 3 tiene la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x' = a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y + a_{13}(t)\,z + f_1(t)\,, \\ y' = a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y + a_{23}(t)\,z + f_2(t)\,, \\ z' = a_{31}(t)\,x + a_{32}(t)\,y + a_{33}(t)\,z + f_3(t)\,, \end{array}\right. \tag{3.3}$$

donde a_{ij} y f_j son funciones reales definidas sobre un intervalo I para todo $i, j = 1, 2, 3$. Si cada una de las funciones f_j, $j = 1, 2, 3$, es idénticamente nula, entonces diremos que el sistema (3.3) es un **sistema homogéneo**, en caso contrario diremos que el sistema es **no homogéneo**.

Mostraremos a continuación la similitud terminológica y conceptual entre los sistemas algebraicos de ecuaciones lineales y estos sistemas de ecuaciones diferenciales. El sistema (3.3) puede ponerse en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$

siendo $\mathbf{A} : I \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una aplicación continua de I en el espacio de las matrices de orden 3×3 reales, dada por

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{bmatrix}$$

para todo $t \in I$ y $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función continua en I dada por

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$

para todo $t \in I$, escrita en forma de vector columna.

De este modo la solución del sistema será un función $\mathbf{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ derivable en I cuya derivada satisfaga la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{t})$, donde $\mathbf{x}'$ denota el vector (la matriz)

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Además, si $x(t)$, $y(t)$ t $z(t)$ satisfacen las condiciones iniciales

$$x(t_0) = x^0,\ y(t_0) = y^0 \text{ y } z(t_0) = z^0$$

entonces $\mathbf{x}(t)$ satisface el problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \end{array}\right.$$

donde

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4 *Escribir en forma matricial el PVI*

$$\begin{cases} x' = tx + e^t y + 1 - t^2 \\ y' = x - y + e^{-t} \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases}$$

y, recíprocamente, escribir el sistema de ED que se obtiene de la forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t^2 & 1 \\ t & -t^2 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-t^2 \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Enunciamos a continuación el teorema de existencia y unicidad de soluciones que se deduce de particularizar a los sistemas de ecuaciones diferenciales (normales) el correspondiente Teorema 3.1.1. El interés de este resultado es doble ya que servirá posteriormente para describir la forma del conjunto de las soluciones del sistema. Lo enunciamos para el caso n.

Teorema 3.1.2 *Sea* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ *un sistema normal de primer orden con* $\mathbf{A} : I \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *y* $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *continuas. Dados* t_0 *un punto de* I *y* $\mathbf{x}^0$ *un vector de* $\mathbb{R}^n$ *arbitrariamente elegidos, existe siempre una única solución* $\mathbf{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida en todo el intervalo* I *que verifica la igualdad* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

3.2. Resolución de Sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

Únicamente resolveremos sistema de ecuaciones diferenciales de coficientes constantes, es decir, sistemas del tipo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{3.4}$$

donde, denotaremos para el caso $n = 3$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i, j = 1, 2, 3$,

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$

son funciones dadas definidas en un intervalo I e

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

es la función vectorial incógnita. Supondremos además que se verifican las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

donde x^0, y^0, $z^0 \in \mathbb{R}$.

Pera obtener la solución de estos sistemas procederemos de la siguiente forma. Denotaremos

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)](z) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[x](z) \\ \mathcal{L}[y](z) \\ \mathcal{L}[z](z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(z) \\ Y(z) \\ Z(z) \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{F}(z) = \mathcal{L}[\mathbf{f}(t)](z)$$

entonces tomando la transformada de Laplace en (3.4) y teniendo en cuenta (3.5) obtenemos que

$$z\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(z) + \mathbf{F}(z),$$

o equivalentemente

$$z\mathbf{X}(z) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(z) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{F}(z)$$

de donde si $\mathbf{I}_2$ denota la matriz identidad de orden 2, entonces

$$(z\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X}(z) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{F}(z),$$

es decir

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_0 + \mathbf{F}(z)).$$

Ejemplo 5 *Resolver el siguiente problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) + 1, \\ y(t) = 3 \cdot x(t) + 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

con

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3.3. Estabilidad

Consideremos un sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{\varphi}\left(t, \mathbf{x}\right)$$

donde $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ...\varphi_n) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función con regularidad suficiente para satisfacer la unicidad de soluciones para un problema de condiciones iniciales o de Cauchy y $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$. Si la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones sel sistema, es decir, el sistema es de la forma

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}\right)$$

donde $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ...\varphi_n) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se dice que el sistema de ecuaciones es **autónomo**. A partir de ahora trabajaremos con sistemas autónomos. Estos sistemas presentan la particularidad de que si $\mathbf{x}\left(t\right)$ es una solución, entonces $\mathbf{x}\left(t+c\right)$ también es solución para cualquier constante c.

Por ejemplo, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = t - x + y, \\ y' = xy, \end{array} \right.$$

es no autónomo mientrás que

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = -x + y, \\ y' = xy, \end{array} \right.$$

o

$$y' = 4y(1-y)$$

es autónomo.

Supongamos que $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in \Omega$ es tal que

$$\boldsymbol{\varphi}\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) = \mathbf{0},$$

entonces la solución constante de la forma

$$\mathbf{x}\left(t\right) = \mathbf{x}_0,$$

es solución del sistema $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}\right)$. Denominaremos **puntos críticos, puntos de reposo, trayectorias de equilibrio o soluciones de equilibrio** a este tipo de soluciones, que son independientes de t.

Ejemplo 6 *Resolviendo el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{r} 0 = -x + y, \\ 0 = xy, \end{array} \right.$$

vemos que $(0,0)$ *es el único punto crítico de este sistema, mientras que al resolver la ecuación*

$$0 = 4y(1-y)$$

comprobamos que 0 *y* 1 *son los puntos críticos de la misma.*

Como veremos posteriormente, estos puntos serán de gran importancia en el analísis de la estabilidad de un sistema. Veamos que se entiende por estabilidad.

Una **solución** $\mathbf{x}(t)$ de un sistema autónomo $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ definida para todo $t \geq 0$ se dice que es **estable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ es otra solución que cumple la condición

$$\|\mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}(0)\| < \delta$$

entonces $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ y se verifica que

$$\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| < \varepsilon$$

para todo $t \geq 0$. Si además se verifica que

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| = 0$$

la solución $\mathbf{x}_1(t)$ se dirá asintoticamente estable. La solución $\mathbf{x}_1(t)$ se dirá inestable si no es estable.

Esto significa que la solución $x(t)$ de un sistema autónomo $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ es estable si toda las solución $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ que comienza cerca de $x(0)$ permanece cerca de $x(t)$ para todo $t > 0$. La solución es inestable si exsite al menos una solución $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ que comienza cerca de $x(0)$, pero no permanece cerca de $x(t)$ para todo $t > 0$. La solución es asintóticamente estable si es estable y si toda solución $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ que comienza suficientemente cerca de $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ se aproxima a $x(t)$ cuando t tiende a $+\infty$.

Ejemplo 7 *Estudiar la estabilidad de las ecuaciones* $x' = x$ *e* $y' = -y$*.*

Ejemplo 8 *Estudiar la estabilidad del sistema*

$$\left\{ \begin{array}{r} x' = y, \\ y' = -x. \end{array} \right.$$

3.3.1. Estabilidad para sistemas lineales

Si el sistema es lineal, es decir, si existe una matriz $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de forma que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

existe un criterio sencillo para determinar la estabilidad de las soluciones.

Teorema 3.3.1 ***Criterio para determinar de la estabilidad de las soluciones***

Sea $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden de coeficientes constantes. Consideremos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Se verifica:

1. *Si todas las raices de $p(\lambda) = 0$ tienen parte real negativa, todas las soluciones del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ son asintóticamente estables.*

2. *Si al menos una de las raices de $p(\lambda) = 0$ tiene parte real positiva, todas las soluciones del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ son inestables.*

3. *Supongamos que todas las raíces de $p(\lambda) = 0$ tienen parte real no positiva y que $\lambda_1 = i\sigma_1, ..., \lambda_l = i\sigma_l$ son todos los que tienen parte real 0. Sea k_j la multiplicidad de $\lambda_j = i\sigma_j$. Esto significa que el $p(\lambda)$ puede factorizarse de la forma*

   $$p(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} ... (\lambda - i\sigma_l)^{k_l} Q(\lambda)$$

   donde todas las raíces de Q tienen parte real negativa. Entonces, toda solución $x = x(t)$ es estable, pero no asintóticamente estable, si para todo $j = 1, ..., l$ la matriz $\mathbf{A}$ tiene k_j autovectores linealmente independientes para el autovalor $\lambda_j = i\sigma_j$. En otro caso, toda solución es inestable.

Ejemplo 9 *Estudiar la estabilidad del sistema*

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = -3x + 2y + 2z, \\ y' = -2x + y + 2z, \\ z' = -2x + 2y + z. \end{array} \right.$$

Ejemplo 10 *Estudiar la estabilidad del sistema*

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = -2x + y - z, \\ y' = x - 2y - z, \\ z' = -x + y - 2z. \end{array} \right.$$

Ejemplo 11 *Estudiar la estabilidad del sistema*

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = -4x + y + 3z, \\ y' = 2z, \\ z' = -2y. \end{array} \right.$$

Ejemplo 12 *Estudiar la estabilidad del sistema*

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{array} \right.$$

En ejemplo anterior pone de manifiesto que no siempre resulta factible aplicar el criterio anterior para estudiar la estabilidad de las soluciones de un sistema. En estos casos podemos usar el siguiente criterio que, aunque no siempre es aplicable, supone una gran ayuda para determinar al menos si el sistema es asintóticamente estable.

Teorema 3.3.2 ***Criterio de Routh-Hurwitz***
Todas las raices del polinomio característico

$$p(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right)$$

tienen parte real negativa si y sólo si $D_k > 0$ *para todo* $k = 1, 2, \ldots, n$ *donde*

$$D_1 = a_1 \qquad y \qquad D_k = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \ldots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_k \end{pmatrix}$$

donde $a_j = 0$ *si* $j > n$.

Ejemplo 13 *Estudiar la estabilidad del sistema*

$$\begin{cases} x' = -2x + y - z, \\ y' = x - 2y - z, \\ z' = -x + y - 2z. \end{cases}$$

También puede ser de utilidad el siguiente criterio.

Teorema 3.3.3 ***Criterio del Círculo de Gershgorin***
Sea $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *con valores propios* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$*. Entonces todos los valores propios están en el conjunto plano de la forma*

$$D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$$

donde D_k *son los círculos de centro* $(a_{kk}, 0)$ *y radio* $r_k = \sum_{j\neq k} |a_{kj}|$ *para* $j, k = 1, 2, ..., n$*, es decir,*

$$D_k = \left\{ x + iy \in \mathbb{C}\text{:}\sqrt{(x - a_{kk})^2 + y^2} < r_k \right\}.$$

Ejemplo 14 *Estudiar la estabilidad del sistema*

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z, \\ y' = -2y + z, \\ z' = 4x - 5z. \end{cases}$$

3.3.2. Utilidad de la estabilidad en la ingeniería

Supongamos que tenemos un sistema de ED lineales no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

donde $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y supongamos que el sistema homogéneo asociado es asintóticamente estable. Entonces toda solución del sistema homogéneo (las raices de $p(\lambda) = 0$ tienen parte real negativa) verifica que

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \mathbf{x}_h(t) = \mathbf{0}.$$

Como la solución general del sistema no homogéneo es de la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t),$$

donde $\mathbf{x}_h(t)$ es la solución general del sistema homogéneo y $\mathbf{x}_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo, si tomamos límites cuando t tiende a infinito, tenemos que

$$\mathbf{x}(t) \simeq \mathbf{x}_p(t),$$

es decir, para tiempos grandes (aquí lo de grande depende de cada sistema) la solución del sistema no homogéneo es básicamente la solución particular del mismo y la parte correspondiente al sistema homogéneo se va reduciendo con el tiempo.

En ingeniería a la función $\mathbf{f}(t)$ se le llama entrada del sistema y $\mathbf{x}_p(t)$ es la salida del mismo. Si el sistema es asintóticamente estable, al variar la entrada, varía la salida sin que la parte homogénea intervenga en el proceso. Esto es lo que ocurre en la mayoría de los sistemas lineales utilizados en las ciencias experimentales, como en circuitos o vibraciones mecánicas.

Ejemplo 15 *Determinar la solución de la ED*

$$\begin{cases} x'' + 2x' + 2x = (u_0(t) - u_3(t))\,t, \\ x(0) = x'(0) = \pi, \end{cases}$$

para valores de t suficientemente grandes.

Ejemplo 16 *Obtener la solución $x(t)$ del siguiente problema, cuando el tiempo t es suficientemente grande*

$$\begin{cases} x'' + 6x' + 11x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0,\ x''(t) = 1234 \end{cases}$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in [0, 1[\\ \\ -1 & si \quad t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

3.4. Funciones de Transferencia

Consideremos un sistema (mecánico, electrico,..) regido por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes del tipo

$$a_n x^{n)} + a_{n-1} x^{n-1)} + ... + a_1 x' + a_0 x = f(t)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una señal entrada del sistema y x es la respuesta que produce el sistema a la excitación que f representa.

Aplicando la transformada de Laplace a la ED con todas las condicioes iniciales nulas obtenemos que

$$a_n z^n X(z) + a_{n-1} z^{n-1} X(z) + ... + a_1 z X(z) + a_0 X(z) = F(z),$$

es decir,

$$Q(z) X(z) = F(z)$$

donde $Q(z)$ es el polinomio de grado n enla indeterminada z

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0.$$

Llamaremos **función de transferencia** del sistema a la función

$$T(z) = \frac{1}{Q(z)} = \frac{X(z)}{F(z)}.$$

La estabilidad de las EDCC puede estudiarse a partir de los polos de la función de transferencia entendiendo la estabilidad de la siguiente forma.

La ED es **asintóticamente estable** si, en ausencia de excitación ($f \equiv 0$) y para cualquier condición inicial que consideremos se verifica que

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} |x_h(t)| = 0.$$

Será **estable** si existe $K > 0$ y $t_0 > 0$ tales que $|x_h(t)| < K$ si $t > t_0$. Finalmente el sistema será inestable si

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} |x_h(t)| = +\infty.$$

Teorema 3.4.1 *Sea* $Q(z) = \prod_{i=1}^{r} a_n (z - \beta_i)^{n_i}$ *donde* $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. *Entonces la ED es*

1. *Asintóticamente estable si* $\operatorname{Re} \beta_i < 0$ *para todo* $i = 1, 2, ..., r$.
2. *Estable si* $\operatorname{Re} \beta_i \leq 0$ *y* $\operatorname{Re} \beta_i = 0$ *implica que la multiplicidad de* β_i *es* 1.
3. *Inestable si no se cumple algunas de las condiciones (a) o (b) anteriores.*

Ejemplo 17 *Verificar que el sistema definido por el PVI*

$$\begin{cases} x'' + 6x' + 25x = \sin(3t), \\ x(0) = x_0 \text{ y } x'(0) = x_1, \end{cases}$$

es asintóticamente estable.

3.4.1. Respuesta a una señal sinusuidal

Consideremos un sistema (mecánico, electrico,..) que sea asintóticamente estable con función de transferencia $T(z)$ de manera que es .^{es}timulado"por una función tipo seno de la forma

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

donde A es la amplitud, ω es la frecuencia y ϕ es la fase inicial. Sabemos que la función seno es 2π periódico de donde decucimos de la siguiente igualdad que

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + 2\pi + \phi) = A \cdot \sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

f es $\frac{2\pi}{\omega} = T$ periódica y, por lo tanto que, la frecuencia viene dada por $\omega = \frac{2\pi}{T}$ donde T es el periodo de f.

Si la fase inicial es $\phi = 0$ la transformada de Laplace de dicha señal será

$$F(z) = A\frac{\omega}{z^2 + \omega^2}.$$

Por otro lado la respuesta que que produce el sistema se calculará como

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[T(z)\,F(z)\right](t)$$

y dado que estamos suponiendo que el sistema es asintóticamente estable, se tiene que los polos de la función de transferencia tienen parte real negativa, por lo que ninguno de ellos coincidirá con los polo de $F(z)$ que son $\pm i\omega$. En el cálculo de la transformada inversa, los polos de la función de transferencia dan lugar a términos que aparecen multiplicados por factores de la forma e^{-ta} con $a > 0$, términos que tienden a cero cuando $t \longrightarrow +\infty$. Por todo esto para calcular la transformada inversa para valores de t suficientemente grandes basta con considerar los polos de la función $F(z)$, es decir, podemos asumir que

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Res}\left(T(z)\,e^{tz}A\frac{\omega}{z^2+\omega^2}, i\omega\right) + \operatorname{Res}\left(T(z)\,e^{tz}A\frac{\omega}{z^2+\omega^2}, -i\omega\right) \\ &= T(i\omega)\,e^{ti\omega}A\frac{\omega}{i\omega + i\omega} + T(-i\omega)\,e^{-ti\omega}A\frac{\omega}{-i\omega - i\omega} \\ &= T(i\omega)\,\frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - T(-i\omega)\,\frac{Ae^{-ti\omega}}{2i}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los coeficientes del sistema son reales escribimos $T(i\omega)$ y $T(-i\omega)$ en forma polar y obtenemos que

$$T(i\omega) = |T(i\omega)|\,e^{i\arg(T(i\omega))}$$

y, al ser $T(z)$ una función racional se verifica que $T(-i\omega) = \overline{T(i\omega)}$ y al ser $i\omega$ imaginario puro $\arg(T(-i\omega)) = -\arg(T(i\omega))$, por lo que

$$\begin{aligned} T(-i\omega) &= |T(-i\omega)|\, e^{i\arg(T(-i\omega))} \\ &= \left|\overline{T(i\omega)}\right| e^{-i\arg(T(i\omega))} = |T(i\omega)|\, e^{-i\arg(T(i\omega))}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en $x(t)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= |T(i\omega)|\, e^{i\arg(T(i\omega))} \frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - |T(i\omega)|\, e^{-i\arg(T(i\omega))} \frac{Ae^{-ti\omega}}{2i} \\ &= A\,|T(i\omega)| \frac{e^{i(t\omega+\arg(T(i\omega)))} - e^{-i(t\omega+\arg(T(i\omega)))}}{2i} \\ &= A\,|T(i\omega)| \sin(t\omega + \arg(T(i\omega))) \\ &= A\,|T(i\omega)| \sin(t\omega + \operatorname{Arg}(T(i\omega))) \end{aligned}$$

donde el término $|T(i\omega)|$ mide si la respuesta amplifica o atenua la señal, mientras que $\arg(T(i\omega))$ representa una variación de la fase respecto de la fase inicial. Asimismo, $T(i\omega)$ puede ser determinado experimentalmente introduciendo una señal sinusuidal.

De la misma forma se puede comprobar que si

$$f(t) = A \cdot (\sin(\omega t) + \phi)$$

entonces

$$x(t) = A\,|T(i\omega)| \sin(t\omega + \phi + \operatorname{Arg}(T(i\omega))).$$

Ejemplo 18 *Encontrar la respuesta al sistema en la fase estacionaria, es decir, cuando el tiempo es suficientemente grande de la EDO del Ejemplo 17*

Consideremos una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes con función de transferencia $T(z)$. Supongamos que el sistema es asintóticamente estable, de tal manera que si $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ es la entrada al sistema, se verifica que su salida para tiempos suficientemente grandes viene dada por

$$x(t) = A\,|T(i\omega)| \sin(t\omega + \phi + \operatorname{Arg}(T(i\omega))).$$

Supongamos ahora que la señal es periódica de periodo $2L$. Dicha función puede expresarse en su serie de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) \end{aligned}$$

donde $\omega = \frac{\pi}{L}$. Por otra parte si escribimos (a_n, b_n) en coordenadas polares mediante la expresión

$$\begin{cases} b_n = A_n \cos \phi_n, \\ a_n = A_n \sin \phi_n, \end{cases}$$

podemos escribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \sin \phi_n \cos (n\omega t) + A_n \cos \phi_n \sin (n\omega t) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \sin \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin (n\omega t + \phi_n). \end{aligned}$$

Si ahora $f(t)$ es la entrada al sistema anterior, entonces su salida para tiempos suficientemente grandes vendrá dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} T(0) \sin \left(0 + \frac{\pi}{2} + \mathrm{Arg}\,(T(0)) \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \left| T(in\omega) \right| \sin (n\omega t + \phi_n + \mathrm{Arg}\,(T(in\omega))) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left| T(in\omega) \right| \sin (n\omega t + \phi_n + \mathrm{Arg}\,(T(in\omega))). \end{aligned}$$

3.5. Ejercicios Propuestos

1. Resuelve los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$a) \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x' = -4(x+y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6, \quad y(0) = -2 \end{cases}$$

$$d)\quad \begin{cases} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = -1 \end{cases}$$

$$e)\quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = -1, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = -1 \end{cases}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales:

$$a)\quad \begin{cases} x' = y + te^{2t} \\ y' = -2x + 3y + e^{2t} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = -1 \end{cases}$$

$$b)\quad \begin{cases} x' = 4x + 3y + 5z + e^{t}\operatorname{sen} 2t \\ y' = -y - 4z \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$$

$$c)\quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d)\quad \begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + z + t \\ z' = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 0 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x' = -2x - 5y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \\ x(0) = -1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

3. Estudia mediante el método de los valores propios, la estabilidad de los siguientes sistemas lineales:

$$a)\ \begin{cases} x' = x - 5y + 5z \\ y' = -2x - 2y + 2z \\ z' = 3x - 3y + 3z \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x' = -5x + y - z \\ y' = -2x - 2y + 2z \\ z' = -3x + 3y - 3z \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x' = -x - 2z \\ y' = 3x - 2y \\ z' = 4x + z \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x' = -9x + y - 2z \\ y' = 3x - 9y \\ z' = 4x + y + z \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x' = -5x + y - z \\ y' = -3x - y + 3z \\ z' = -4x + 4y + -2z \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} x' = -2x - 2y + 2z \\ \\ y' = -2x - 2y + 2z \\ \\ z' = 0 \end{cases}$$

4. Determina, si es posible, mediante el teorema de Routh-Wirtz la estabilidad asintótica de los siguientes sistemas:

$$a)\ \begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x \\ \\ y' = \dfrac{1}{2}x - y - \dfrac{1}{2}z \\ \\ z' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y - z \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x' = -3x - y + z \\ \\ y' = x - 5y - z \\ \\ z' = 2x - 2y - 4z \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x' = -\dfrac{5}{12}x - \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{4}z \\ \\ y' = \dfrac{5}{12}x - \dfrac{13}{12}y - \dfrac{5}{12}z \\ \\ z' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{5}{6}z \end{cases}$$

5. Repite el problema anterior utilizando el teorema de los círculos de Gershgorin.

6. Obtener los puntos críticos y determinar si son o no hiperbólicos

$$a)\ \begin{cases} x' = x - xy \\ \\ y' = -y + y^2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x' = y \\ \\ y' = -x + x^3 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x' = x - xy \\ \\ y' = x - y \end{cases}$$

d) $\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ \\ y' = x^3 \end{array} \right.$

7. Consideremos la ecuación de Van Der Pol

$$x'' + x - \varepsilon x' \left(1 - x^2\right) = 0$$

con $\varepsilon \in R$. Transforma la ecuación en un sistema plano y determinar los puntos críticos del mismo. Determinar la naturaleza de los puntos críticos en función de ε.

8. Idem para la ecuación

$$x'' + 2\varepsilon x' + \left(1 - \varepsilon^2\right) x = 0$$

9. Supongamos un circuito eléctrico LRC con $L = 0{,}02H$, $R = 300\Omega$ y $C = 4 \times 10^{-6} F$. Determina las salidas en régimen estacionario para los siguientes potenciales

a) $V(t) = \operatorname{sen} t$.

b) $V(t) = \cos t$.

c) $V(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 10 & t \in [0, 0{,}01[\,, \\ 0 & t \in [0{,}01, 0{,}02[\,. \end{array} \right.$

NOTA: La pregunta es equivalente a encontrar la respuesta al sistema cuando $t \to \infty$.

3.6. Ejercicios complementarios

1. Transformar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales, en la variable $y = y(t)$, en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) $x'' + 2x' + x = -2$.

b) $x'' + 8x' = 8t$.

c) $x'' + 4x' + 4x = 8e^{-2t}$.

d) $x'' + 6x' + 9x = 10 \sin t$ con $x(0) = x'(0) = 0$.

e) $x'' + x = 2 \cos t$ con $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$.

f) $x''' + \cos x = e^t$.

g) $x^{(iv)} + x'' = 1$.

2. Sea $x(t)$ una solución de la ecuación diferencial $x'' + x' + x = 0$. Demostrar que
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$
es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

3. Sea
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$
una solución del sistema de ecuaciones diferenciales
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$
Demostrar que $x = x_1(t)$ es una solución de la ecuación diferencial $x'' + x' + x = 0$.

4. Escribir en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

   a) $\begin{cases} x' = 3 - 2y, \\ y' = 2x - 2t. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x + 3z. \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x' = 2x - 9y, \\ y' = x + 8y. \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0. \end{cases}$

   e) $\begin{cases} x' = 3x - \frac{1}{2}y - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}, \\ y' = 2y - 2t - 1. \end{cases}$

   f) $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, \\ z' = x + y. \end{cases}$

   g) $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y. \end{cases}$

   h) $\begin{cases} x' = 4x - 5y, & x(0) = 0, \\ y' = x, & y(0) = 1. \end{cases}$

   i) $\begin{cases} x' = x + y + t, & x(0) = -\frac{7}{9}, \\ y' = x - 2y + 2t, & y(0) = -\frac{5}{9}. \end{cases}$

$$j)\ \begin{cases} x' = x - 3y + 2z, & x'(0) = -2, \\ y' = -y, & y'(0) = 0, \\ z' = -y - 2z, & z'(0) = 3. \end{cases}$$

5. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$a)$ $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x$ con $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$b)$ $x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x$ con $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$c)$ $x' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} x$ siendo $x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$d)$ $x' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} x$ siendo $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

6. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$a)$ $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x$ con $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$b)$ $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x$ con $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$c)$ $x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$ siendo $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$d)$ $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} x$ siendo $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

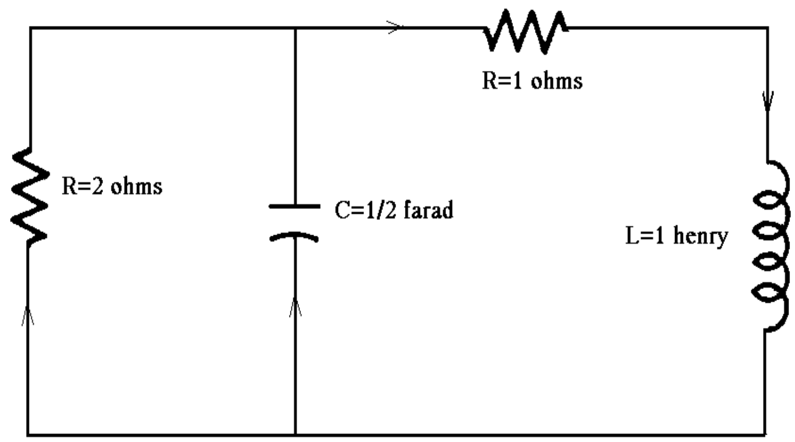
7. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$a)$ $x' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x$ siendo $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$b)$ $x' = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} x$ siendo $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$c)$ $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x$ siendo $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8. Consideremos el circuito que se muestra en la siguiente figura:



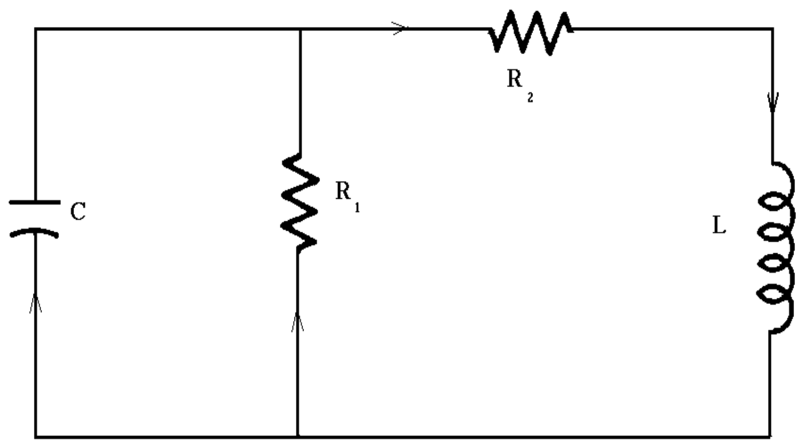
Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales lineales que de él se obtiene. Determinar la corriente I que pasa por la inductancia y la caída del voltaje V a través del condensador suponiendo que $I(0) = 1$ y $V(0) = 2$.

9. Consideremos el circuito del ejercicio anterior cuando $R_1 = R_2 = 4$ ohms, $C = \frac{1}{2}$ farads y $L = 8$ henrys.

   a) Determinar $I(t)$ y $V(t)$ si $I(0) = 2$ amperios y $V(0) = 3$ volts.

   b) Determinar los valores del límite de $I(t)$ y $V(t)$ cuando $t \longrightarrow +\infty$, independientemente de los valores iniciales.

10. Considerar el circuito que se muestra en la siguiente figura:



a) Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales lineales que de él se obtiene.

b) Determinar la solución general del sistema obtenido si $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = \frac{3}{5}$ ohm, $L = 2$ henrys y $C = \frac{2}{3}$ farad.

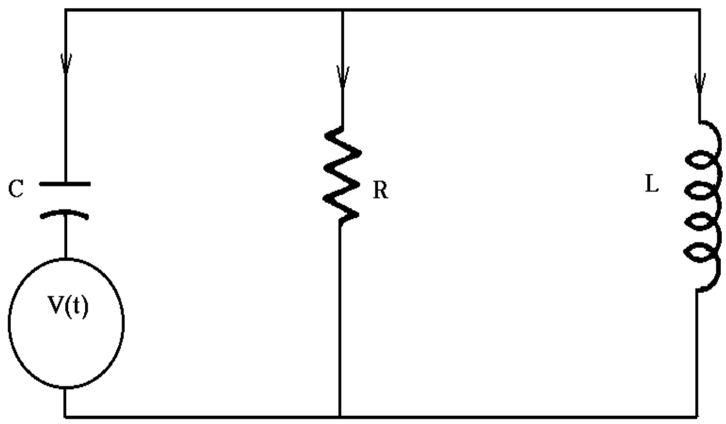
c) Verificar que $I(t)$ tiende a cero y $V(t)$ tiende a cero cuando $t \longrightarrow +\infty$, independientemente de los valores iniciales.

11. Considérese el circuito del ejercicio anterior. Se pide:

a) Determinar una condición para R_1, R_2, C y L si los valores propios, de la matriz de coeficientes, son reales y distintos.

b) Supongamos que se determino la condición del apartado anterior. Verificar que ambos valores propios son negativos. En tal caso, verificar que $I(t)$ tiende a cero y $V(t)$ tiende a cero cuando $t \longrightarrow +\infty$.

12. El circuito eléctrico que se muestra en la figura



se describe por medio del sistema de ecuaciones diferenciales

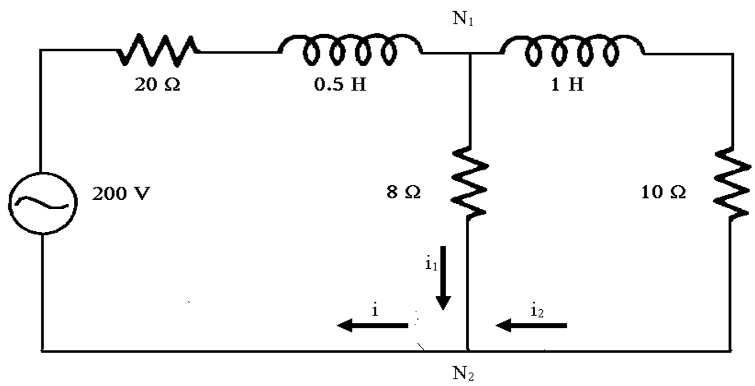
$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} V(t).$$

donde $x = (x_1, x_2)$, siendo x_1 la corriente que pasa por la inductancia, x_2 es la caída de voltaje a través del condensador y $V(t)$ es el voltaje suministrado por la fuente externa.

Determinar la solución del sistema que satisfaga las condiciones iniciales $x(0) = \mathbf{0}$ para

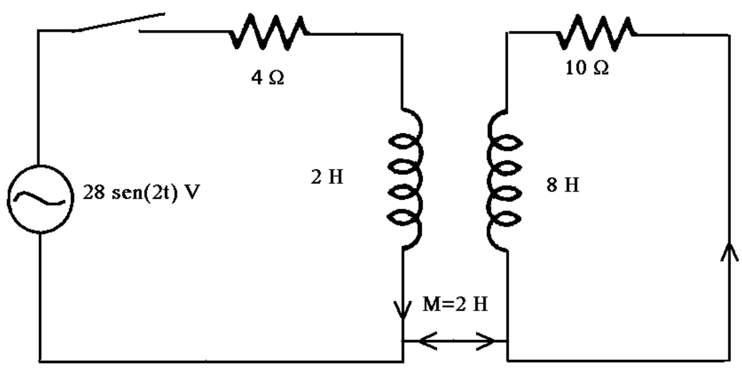
$$V(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

13. En la siguiente red en paralelo no hay flujo de corriente en ninguno de los lazos antes del cierre del interruptor en el tiempo $t = 0$.



Deducir las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ que circulan en cada malla en el tiempo t.

14 Un voltaje $e(t) = 28\,\mathrm{sen}\,(2t)\ V$ es aplicado a un primer circuito en el tiempo $t = 0$, y la inducción mutua M conduce la corriente $i_2(t)$ en el segundo circuito de la figura



Si previo al cierre del interruptor, las corrientes en ambos circuitos son cero, determinar la corriente inducida $i_2(t)$ en el segundo circuito en el tiempo t.